凸幾何上のマトロイドと貪欲アルゴリズム (21世紀の数理計画 : 最適化モデルとアルゴリズム)

佐野, 良夫

数理解析研究所講究録
第 1629 巻 2009 年 37-44

凸幾何上のマトロイドと貪欲アルゴリズム

京都大学・数理解析研究所　　佐野良夫

概要

凸幾何上に定義されたマトロイド構造（凸幾何マトロイド）とは、2007 年に S. Fujishige, G. A. Koshevoy, Y. Sano によって、マトロイドの一般化として導入された概念である。彼らは、凸幾何マトロイドの基や独立集合について、その組合せ構造を明らかにした。

本稿では、凸幾何マトロイド上での最大基問題、最小基問題、およびそれらと貪欲アルゴリズムとの関係について考察する。

1. イントロダクション

マトロイドとは、線形空間における 1 次独立の概念を一般化して定義された離散構造であり、1935 年に H. Whiteney [16] によって導入された。マトロイドは、効率のよいアルゴリズムに関係があるため、離散最適化において最も重要な概念の 1 つである。そのためマトロイドは、多くの研究者により、研究され拡張されてきた。(マトロイド理論については、[13], [8], [14], [15] などを参照。)

例えば、1972 年、F. D. J. Dunstan, A. W. Ingleton, D. J. A. Welsh [3] は、普通のマトロイドの一般化として、半順序集合上に定義される超マトロイドという概念を導入した。U. Faigle は、1978 年 [6] に劣モジュラ超マトロイドを定義し、1980 年 [5] には、マトロイドの別の一般化として、半順序集合上定義される幾何学的構造を考えた。É. Tardos [12] は、超マトロイドの特別なクラスの 1 つである分配束上の超マトロイド、すなわち分配超マトロイドに対して、マトロイド型の交叉定理を示した。半順序集合のイデアル全体の集合は分配束をなすという点から、分配超マトロイドは半順序マトロイドとも呼ばれる。U. N. Peled と M. K. Srinivasan は 1993 年に、半順序マトロイドに対して、マトロイドの場合のような独立マッチング問題を考えた。また 1993 年と 1998 年に M. Barnabei, G. Nicoletti と L. Pezzoli [1], [2] は、半順序マトロイドの組合せ的構造を台集合の半順序構造の言葉を用いて記述した。

S. Fujishige, G. A. Koshevoy, Y. Sano [7] は、マトロイドの概念を一般化し、新たに凸幾何上にマトロイドを定義した。これは、マトロイドの定義される台集合として,

半順序集合のかわりにより広いクラスの離散構造である凸幾何を考え定義したものであり、半順序マトロイドを含むより一般化されたものである。その凸幾何マトロイドに対して，基や独立集合などの概念を定義し，それらの組合せ構造の性質について調べ、いくつかの凸幾何マトロイドの特徴付けを与えている。半順序マトロイドが超マトロイドであることに対し、そこで定義された凸幾何マトロイドは，超マトロイドの特別な場合ではないということも示された。さらに凸幾何マトロイドの部分クラスとして，ストリクト凸幾何マトロイドを定義し、このストリクト凸幾何マトロイドは，凸幾何の閉集合族のなす束上の超マトロイドに一致することを示した。さらに [10] において、ストリクト凸幾何マトロイドの階数関数の特徴づけが与えられ、[11] では、ストリクト凸幾何マトロイドと貪欲アルゴリズムの関係について論じられている。

本稿では、凸幾何マトロイド上での最大基問題、最小基問題、およびそれらと貪欲アルゴリズムとの関係について考察する。

2. 準備および定義

E を空でない有限集合とし、$\mathcal{F}$ を E の部分集合族とする。組 $(E,\mathcal{F})$ が **(抽象) 凸幾何**であるとは、$\mathcal{F}$ が次の性質を満たすときをいう。

(CG0) $\emptyset,\ E \in \mathcal{F}$.

(CG1) $X, Y \in \mathcal{F} \Longrightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$.

(CG2) 任意の $X \in \mathcal{F} \setminus \{E\}$ に対し、ある $e \in E \setminus X$ が存在して $X \cup \{e\} \in \mathcal{F}$ となる。

集合 E を **台集合** といい、$\mathcal{F}$ の元を **閉集合**(もしくは、**凸集合**) という。凸幾何 $(E,\mathcal{F})$ に対し、その**閉包作用素** $\tau : 2^E \to \mathcal{F}$ を

$$\tau(X) = \bigcap\{Y \mid Y \in \mathcal{F}, X \subseteq Y\} \quad (X \in 2^E).$$

と定義する。つまり、$\tau(X)$ は、X を含む極小な閉集合である。. さらに、**端点作用素** $\mathrm{ex} : \mathcal{F} \to 2^E$ と**双対端点作用素** $\mathrm{ex}^* : \mathcal{F} \to 2^E$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{ex}(X) &= \{e \mid e \in X,\ X \setminus \{e\} \in \mathcal{F}\} \quad (X \in \mathcal{F}),\\ \mathrm{ex}^*(X) &= \{e \mid e \in E \setminus X, X \cup \{e\} \in \mathcal{F}\} \quad (X \in \mathcal{F})\end{aligned}$$

と定義する。$\mathrm{ex}(X)$ の元を閉集合 X の**端点**、$\mathrm{ex}^*(X)$ の元を X の**双対端点**という。

定義 ([7]). $(E,\mathcal{F})$ を凸幾何とし、$\mathcal{B}$ を $\mathcal{F}$ の部分族とする。$M=(E,\mathcal{F};\mathcal{B})$ が**凸幾何** $(E,\mathcal{F})$ **上のマトロイド**（もしくは、単に**凸幾何マトロイド**、または **cg-matroid**）であるとは、$\mathcal{B}$ が次を満たすときをいう。

(B0) $\mathcal{B}\neq\emptyset$.

(B1) $B_1,B_2\in\mathcal{B}$, $B_1\subseteq B_2 \implies B_1=B_2$.

(BM) (中間基公理)
$X\subseteq B_1$, $B_2\subseteq Y$, $X\subseteq Y$ であるような、任意の $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ と $X,Y\in\mathcal{F}$ に対し、$X\subseteq B\subseteq Y$ となるような $B\in\mathcal{B}$ が存在する。

$\mathcal{B}$ の元を M の**基**といい、$\mathcal{B}$ を**基族**という。閉集合 $X\in\mathcal{F}$ について、M のある基に含まれるものを M の**独立集合**、M のある基を含むものを M の**全域集合**という。M の独立集合の全体の集合を**独立集合族**といい、$\mathcal{I}(M)$ で表し、M の全域集合の全体の集合を**全域集合族**といい、$\mathcal{S}(M)$ で表す。 □

3. 凸幾何マトロイドの組合せ構造

定理 1 ([7], Theorem 3.3). 凸幾何マトロイドの基のサイズは同じである。すなわち、

(B1)′ $B_1,B_2\in\mathcal{B}, B_1\subseteq B_2\Rightarrow B_1=B_2$

が成り立つ。

凸幾何マトロイドの基族の交換公理による特徴づけは次のように与えられる。

定理 2 ([7], Theorem 3.7). $(E,\mathcal{F})$ を凸幾何とし、$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$ とする。このとき、$\mathcal{B}$ が $(E,\mathcal{F})$ 上の凸幾何マトロイドの基族であるのは、$\mathcal{B}$ が (B0) と (BE) を満たすとき、またそのときに限る。

(BE) (交換公理)
任意の $B_1,B_2\in\mathcal{B}$ と任意の $e_1\in\mathrm{ex}(\tau(B_1\cup B_2))\setminus B_2$ に対して、
$(B_1\setminus\{e_1\})\cup\{e_2\}\in\mathcal{B}$ となるような $e_2\in\tau(B_1\cup B_2)\setminus B_1$ が存在する。 □

定理 3 ([7], Theorem 3.8). $(E,\mathcal{F})$ を凸幾何とし、$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$ とする。このとき、$\mathcal{B}$ が $(E,\mathcal{F})$ 上の凸幾何マトロイドの基族であるのは、$\mathcal{B}$ が (B0) と (BmE) を満たすとき、またそのときに限る。

(BmE) (多重交換公理)
任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ と、$\tau(B_1 \cup B_2) \setminus S \in \mathcal{F}$ であるような任意の $S \subseteq B_1 \setminus B_2$ に対して、
$|T| = |S|$ かつ $(B_1 \setminus S) \cup T \in \mathcal{B}$ となるような $T \subseteq \tau(B_1 \cup B_2) \setminus B_1$ が存在する。 □

凸幾何マトロイドの独立集合族は、次のように特徴づけられる。

定理 4 ([7], Theorem 3.10, Theorem 3.12). $(E, \mathcal{F})$ を凸幾何とし、$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{F}$ とする。このとき、$\mathcal{I}$ が $(E, \mathcal{F})$ 上の凸幾何マトロイドの独立集合族であるのは、$\mathcal{I}$ が次の性質を満たすとき、またそのときに限る。

(I0) $\emptyset \in \mathcal{I}$.

(I1) $I_1 \in \mathcal{F},\ I_2 \in \mathcal{I},\ I_1 \subseteq I_2 \implies I_1 \in \mathcal{I}$.

(IA) (増大公理)
$|I_1| < |I_2|$ であるような任意の $I_1 \in \mathcal{I}$ と $I_2 \in \mathrm{Max}(\mathcal{I})$ に対して、
$I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるような $e \in \tau(I_1 \cup I_2) \setminus I_1$ が存在する。

ここで、$\mathrm{Max}(\mathcal{I})$ は $\mathcal{I}$ の極大元の集合を表す。

凸幾何マトロイドの全域集合族は、次のように特徴づけられる。

定理 5. $(E, \mathcal{F})$ を凸幾何とし、$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$ とする。このとき、$\mathcal{S}$ が $(E, \mathcal{F})$ 上の凸幾何マトロイドの全域集合族であるのは、$\mathcal{S}$ が次の性質を満たすとき、またそのときに限る。

(S0) $E \in \mathcal{S}$.

(S1) $S_1 \in \mathcal{F},\ S_2 \in \mathcal{S},\ S_1 \supseteq S_2 \Longrightarrow S_1 \in \mathcal{S}$.

(SR) (減少公理)
$|S_1| > |S_2|$ であるような任意の $S_1 \in \mathcal{S}$ と $S_2 \in \mathrm{Min}(\mathcal{S})$ に対して、
$S_1 \setminus \{e\} \in \mathcal{S}$ となるような $e \in S_1 \setminus S_2$ が存在する。

ここで、$\mathrm{Min}(\mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ の極小元の集合を表す。

4. 最大基問題と貪欲アルゴリズム

$M = (E, \mathcal{F}; \mathcal{B})$ を凸幾何マトロイド、 $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を台集合 E 上の非負重み関数とする。

E の部分集合 X に対して、X の元の重みの和 $\Sigma_{e \in X} w(e)$ を $w(X)$ で表す。

このとき、次の最適化問題「最大基問題」を考える。

$$\begin{array}{lll} P_{\max}(\mathcal{B}, w) & \text{最大化：} & w(B) \\ & \text{制約条件：} & B \in \mathcal{B}(M) \end{array}$$

ここで、基族 $\mathcal{B}$ は独立集合族 $\mathcal{I}$ の極大元の集合であるので、上の最大基問題は、次の「最大独立集合問題」と同じ最適解を持つ。

$$\begin{array}{lll} P_{\max}(\mathcal{I}, w) & \text{最大化：} & w(I) \\ & \text{制約条件：} & I \in \mathcal{I}(M) \end{array}$$

貪欲アルゴリズムとは、次のアルゴリズムである。

貪欲アルゴリズム（最良選択貪欲アルゴリズム）

- $I^{(0)} \leftarrow \emptyset$ とする。 $i = 0$ から $n-1$ に対し、次を行う。
- **ステップ i:** もし $I^{(i)} \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ となるような $e \in E \setminus I^{(i)}$ が存在すれば、そのような元のうち重み最大のもの e_{i+1} を選ぶ。すなわち、

$$w(e_{i+1}) = \max\{w(e) \mid e \in E \setminus I^{(i)}, I^{(i)} \cup \{e\} \in \mathcal{I}\}. \tag{4.1}$$

そして $I^{(i+1)} \leftarrow I^{(i)} \cup \{e_{i+1}\}$ とし、ステップ $i+1$ へ行く。
もしそのような元がなければ、$I_{\mathrm{GA}} \leftarrow I^{(i)}$ とし、終了。 □

凸幾何 $(E, \mathcal{F})$ に対して、次で定義される重みの集合 $W^*(\mathcal{F})$ を考える。

$$W^*(\mathcal{F}) := \{w \in \mathbb{R}^E_{\geq 0} \mid w(e_1) \geq \dots \geq w(e_n) \Rightarrow \{e_1, \dots, e_i\} \in \mathcal{F}\ (i = 1, \dots, n)\}$$

定理 6. $M = (E, \mathcal{F}; \mathcal{B})$ を凸幾何マトロイドとする。このとき、貪欲アルゴリズムが、任意の $w \in W^*(\mathcal{F})$ に対して、M の最大基問題の最適解を与えるのは、基族 $\mathcal{B}$ が次の性質を満たすとき、またその時に限る。

- 任意の $X \in \mathcal{F}$ に対し、$\{X \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$ の全ての極大元のサイズは同じである。

5. 最小基問題と双対貪欲アルゴリズム

$M = (E, \mathcal{F}; \mathcal{B})$ を凸幾何マトロイド、 $w : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を台集合 E 上の非負重み関数とする。

このとき、次の最適化問題「最小基問題」を考える。

$$P_{\min}(\mathcal{B}, w) \quad \text{最小化：} \quad w(B)$$
$$\text{制約条件：} \quad B \in \mathcal{B}(M)$$

ここで、基族 $\mathcal{B}$ は全域集合族 $\mathcal{S}$ の極小元の集合であるので、上の最小基問題は、次の「最小全域集合問題」と同じ最適解を持つ。

$$P_{\min}(\mathcal{S}, w) \quad \text{最小化：} \quad w(S)$$
$$\text{制約条件：} \quad S \in \mathcal{S}(M)$$

双対貪欲アルゴリズムとは、次のアルゴリズムである。

双対貪欲アルゴリズム（最悪棄却貪欲アルゴリズム）

- $S^{(0)} \leftarrow E$ とする。$i = 0$ から $n-1$ に対し、次を行う。
- **ステップ** i**:** もし $S^{(i)} \setminus \{e\} \in \mathcal{S}$ となるような $e \in S^{(i)}$ が存在すれば、そのような元のうち重み最大のもの e_{i+1} を選ぶ。すなわち、

$$w(e_{i+1}) = \max\{w(e) \mid e \in S^{(i)}, S^{(i)} \setminus \{e\} \in \mathcal{S}\}. \tag{5.1}$$

そして $S^{(i+1)} \leftarrow S^{(i)} \setminus \{e_{i+1}\}$ とし、ステップ $i+1$ へ行く。
もしそのような元がなければ、$S_{\mathrm{DGA}} \leftarrow S^{(i)}$ とし、終了。 □

凸幾何 $(E, \mathcal{F})$ に対して、次で定義される重みの集合 $W_*(\mathcal{F})$ を考える。

$$W_*(\mathcal{F}) := \{w \in \mathbb{R}^E_{\geq 0} \mid w(e_1) \leq \ldots \leq w(e_n) \Rightarrow \{e_1, \ldots, e_i\} \in \mathcal{F} \ (i = 1, \ldots, n)\}$$

定理 7. $M = (E, \mathcal{F}; \mathcal{B})$ を凸幾何マトロイドとする。このとき、双対貪欲アルゴリズムが、任意の $w \in W_*(\mathcal{F})$ に対して、M の最小基問題の最適解を与えるのは、基族 $\mathcal{B}$ が次の性質を満たすとき、またその時に限る。

- 任意の $X \in \mathcal{F}$ に対し、$\{\tau(X \cup B) \mid B \in \mathcal{B}\}$ の全ての極小元のサイズは同じである。

6. 結論

普通のマトロイドに対しては、貪欲アルゴリズムも双対貪欲アルゴリズムも任意の非負重みに対し、最大基問題、最小基問題に対して最適解を与えていた。それにに対し、凸幾何マトロイドにおいては、基族がある性質を満たす場合には、凸幾何に依存して決まる制限された重みに対して、最適解を与えることがわかった。

参考文献

[1] M. Barnabei, G. Nicoletti, and L. Pezzoli: Matroids on partially ordered sets, *Advances in Applied Mathematics* **21** (1998) 78–112.

[2] M. Barnabei, G. Nicoletti, and L. Pezzoli: The symmetric exchange property for poset matroids, *Advances in Mathematics* **102** (1993) 230–239.

[3] F. D. J. Dunstan, A. W. Ingleton, and D. J. A. Welsh: Supermatroids, *Combinatorics* (*Proc. Conf. Combinatorial Math., Math. Inst., Oxford, 1972*) (1972) 72–122.

[4] P. H. Edelman and R. E. Jamison: The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* **19** (1985) 247–270.

[5] U. Faigle: Geometries on partially ordered sets, *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. B **28** (1980) 26–51.

[6] U. Faigle: On supermatroids with submodular rank function, *Algebraic methods in graph theory, Vol. I (Szeged, 1978)*, Colloq. Math. Soc. János Bolyai **25** (North-Holland, Amsterdam, 1981) 149–158.

[7] S. Fujishige, G. A. Koshevoy, and Y. Sano: Matroids on convex geometries (cg-matroids), *Discrete Mathematics* **307** (2007) 1936–1950.

[8] J. Oxley: *Matroid Theory* (Oxford University Press, Oxford, 1992).

[9] U. N. Peled and M. K. Srinivasan: Poset matching—a distributive analog of independent matching, *Discrete Mathematics* **114** (1993) 403–424.

[10] Y. Sano: Rank functions of strict cg-matroids, *Discrete Mathematics* **308** (2008) 4734-4744.

[11] Y. Sano: The greedy algorithm for strict cg-matroids, *preprint* RIMS-**1581**, RIMS, Kyoto University, February 2007.

[12] É. Tardos: An intersection theorem for supermatroids, *Journal of Combinatorial Theory*, Ser. B **50** (1990) 150–159.

[13] D. J. A. Welsh: *Matroid Theory* (Academic Press, London, 1976).

[14] N. White (ed.): *Theory of Matroids* (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **26**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986).

[15] N. White (ed.): *Combinatorial Geometries* (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications **29**, Cambridge University Press, Cambridge, 1987).

[16] H. Whitney: On the abstract properties of linear dependence, *American Journal of Mathematics* **57** (1935) 509–533.